Kapitel 10: Differentialrechnung für reelle Fkt. mit mehreren reellen Variablen

1. Partielle Ableitung nach einer Variablen x_k: $\frac{\partial z}{\partial x_k} = f_{x_k}$

Tangentengleichungen T_x u. T_y in $P(x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$T_x = z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \quad ; \quad T_y = z - z_0 = f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Tangentialebenengleichung mit T_x, T_y

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Totales Differential der Fkt. $z = f(x, y)$: $dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$

Flächennormale: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\vec{n_0} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Differenzieren von impliziten Fkt. $F(x, y) = 0$

1. Ableitung $\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$

2. Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{F_y}\left(F_{xx} + 2F_{xy} \cdot \frac{dy}{dx} + F_{yy} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$

Richtungsableitung $\frac{df}{ds} = \text{grad } f \cdot \vec{e} = |\text{grad } f| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos\alpha$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Diskussion: a) $\frac{df}{ds} = 0 \Rightarrow \text{grad } f \perp$ Niveaufläche

b) $\frac{df}{ds} = \max \Rightarrow \cos\alpha = 1$

$\Rightarrow \vec{e} \parallel \text{grad } f$

$\Rightarrow \frac{df}{ds} = |\text{grad } f| = \max$

Bsp.: $u = x^3 y^2 \sin(yz)$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 3x^2y^2\sin(yz) \\ x^3 2y \sin(yz) + x^3y^2\cos(yz) \cdot z \\ x^3y^2\cos(yz) \end{pmatrix}$$

grad f in $P(1|-2|\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \text{grad } f|_P = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\frac{df}{ds}$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\frac{df}{ds} = \text{grad } f|_P \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(-36 + 0 + 0) = \frac{-36}{5}$

Kettenregel

a) Geg.: $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $x_i = x_i(t)$

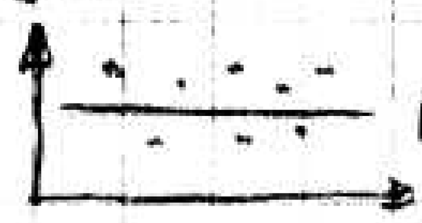
$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{df}{dx_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{df}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}$$

b) Geg.: $z= f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_j}$$

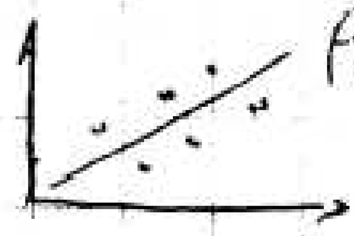
Fehlerrechnung: Geg.: $u=f(x,y,z)$; $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

$$\Delta u_{max} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\Delta z$$



Ausgleichsrechnung: a) $m=0$; $f(x)=a_0$

$$a_0 = \frac{1}{n}\cdot\sum y_i$$



b) $m=1$; $f(x)=a_0+a_1x$

$$n\cdot a_0 + a_1\sum x_i = \sum y_i$$

$$a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

Kapitel 11: Mehrdimensionale Integration

1. Integration über ebenen Bereich:

a) Kart. Koordinaten: $dA = dx\,dy$

b) Polarkoordinaten: $dA = r\,dr\,d\varphi$

c) Sonderfall: $B=\{(u,v) \mid u_1 \le u \le u_2 ; v_1 \le v \le v_2\}$ mit $u_1, u_2, v_1, v_2 = $ konst.

$$\Rightarrow \int_B dA = \int_B f(u)\cdot g(v)\,du\,dv = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du \cdot \int_{v_1}^{v_2} g(v)\,dv$$

2. Integration über räumlichen Bereich:

a) Kart. Koordinaten: $dV = dx\,dy\,dz$

b) Zylinderkoordinaten: $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

c) Kugelkoordinaten : $dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Schwerpunkte : $x_S = \frac{1}{M}\int_B x \varrho \, dV$; $y_S = \frac{1}{M}\int_B y \varrho \, dV$; $z_S = \frac{1}{M}\int_B z \varrho \, dV$

mit $M = \int_B \varrho \, dV$

Geometrischer Schwerpunkt mit $\varrho = \varrho_0$:

$x_S = \frac{1}{V}\int_B x \, dV$; $y_S = \frac{1}{V}\int_B y \, dV$; $z_S = \frac{1}{V}\int z \, dV$ mit $V = \int_B dV$

Kapitel 12 : Lineare Algebra

Determinanten quatratischer Matrizen

Entwicklungssatz von Laplace $\sum a_{ik} \cdot A_{ik} = \det A$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Entwicklung nach 1. Zeile

$\det A = 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot 6 = 6$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 5 = -5$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (-4) = -4$

$\det A = 1 \cdot 6 + (-1)(-5) + 2 \cdot (-4) = 3$

b) Entwicklung nach 3. Spalte

$\det A = 2 \cdot A_{13} + (-1) \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{33}$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 (-4) = -4$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot 5 = -5$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot 3 = 3$

$\det A = 2 \cdot (-4) + (-1)(-5) + 2 \cdot 3 = 3$

Inverse Matrizen : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\mathrm{Adj.}\, A) = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Lineare Gleichungssysteme : $A\vec{x} = \vec{b}$

1. $\mathrm{rg}\, A > \mathrm{rg}\,(A, \vec{b})$ $\Rightarrow$ Nicht lösbar
2. $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\,(A, \vec{b})$ $\Rightarrow$ 1 Lösung
3. $\mathrm{rg}\, A < \mathrm{rg}\,(A, \vec{b})$ $\Rightarrow$ ∞ Lösungen

Kapitel 13: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Trennbare DGL 1. Ordnung

DGL: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad | \cdot \frac{dx}{g(y)}$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

Bsp.: DGL: $yy' + x = 0 \quad ; \; y' = \frac{-x}{y} = -x \cdot \frac{1}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = -x \cdot \frac{1}{y} \quad | \cdot y \cdot dx$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

Allg. Lösung: $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + C = 0$

Kapitel 14: Laplace Transformation

Sprungfunktion und δ-Impulse

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \qquad \dot{\varepsilon}(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-a}^{+a} \delta(t)\,dt = a$$

$$(h \cdot \varepsilon(t))^{\cdot} = h \cdot \delta(t) \quad ; \; (h \cdot \varepsilon(t-t_0))^{\cdot} = h \cdot \delta(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (h \cdot \delta(t-t_0))\,dt = h$$

Multiplikation des δ-Impulses mit einer stetigen Fkt. $f(t)$

$f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$ Bsp.: $\sin(\omega t) \cdot \delta(t) = \sin(0) \cdot \delta(t) = 0$

Ein-/Ausschaltvorgänge – Verallgemeinerte Ableitung

a) Einschalten in $t = t_0$

$$y = f(t) \cdot \varepsilon(t-t_0)$$

$$\dot{y} = \dot{f}(t) \cdot \varepsilon(t-t_0) + f(t_0) \cdot \delta(t-t_0)$$

b) Ausschalten in $t = t_1$

$$y = f(t) \cdot (1 - \varepsilon(t-t_1))$$

$$\dot{y} = \dot{f}(t) \cdot (1 - \varepsilon(t-t_1)) + f(t_1) \cdot (-\delta(t-t_1))$$

c) Ein in t_1 / Aus in t_2

$$y = f(t) \cdot (\varepsilon(t-t_1) - \varepsilon(t-t_2))$$

$$\dot{y} = \dot{f}(t)(\varepsilon(t-t_1) - \varepsilon(t-t_2)) + f(t_1) \cdot \delta(t-t_1) - f(t_2) \cdot \varepsilon(t-t_2)$$

Eigenschaften der Laplace Transformation

1. Linearität : $f_1(t)\cdot\varepsilon(t) ○\!\!-\!\!● F_1(s)$; $f_2\cdot\varepsilon(t) ○\!\!-\!\!● F_2(s)$

$$\Rightarrow (c_1\cdot f_1(t)+c_2\cdot f_2(t))\cdot\varepsilon(t) ○\!\!-\!\!● c_1F_1(s)+c_2F_2(s)$$

2. Ähnlichkeit: $f(t)\cdot\varepsilon(t) ○\!\!-\!\!● F(s) \Leftrightarrow f(at)\cdot\varepsilon(t) ○\!\!-\!\!● \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$

3. Zeitverschiebung: $g(t)\cdot\varepsilon(t) ○\!\!-\!\!● G(s)$

$$g(t-t_0)\cdot\varepsilon(t-t_0) ○\!\!-\!\!● G(s)\cdot e^{-st_0}$$

Lösung einer linearen DGL mit konst. Koef.

DGL: $y''+2y'+5y=e^{-t}\sin(t)$; Anfangsbed.: $y(0-)=0$; $\dot{y}(0-)=1$

$$s^2y(s)-sy(0-)-\dot{y}(0-)+2(sy(s)-y(0-))+5y(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$y(s)=(s^2+2s+5)=\frac{1}{s^2+2s+2}+1$$

$$y(s)=\frac{\frac{1}{s^2+2s+2}+1}{s^2+2s+5}=\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{Z(s)}{N(s)} \text{ ... Partialbruchzerl. ...}$$

$$\frac{Z(s)}{N(s)} ●\!\!-\!\!○ y(t)=\left(\frac{1}{3}\sin(t)e^{-t}+\frac{1}{3}\sin(2t)\cdot e^{-t}\right)\cdot\varepsilon(t)$$

Übertragungsfunktion $G(s)=\frac{X_a(s)}{X_e(s)}=\frac{\text{Ausgangsgröße}}{\text{Eingangsgröße}}$

$$G(s)=k\cdot\frac{(s-s_{01})(s-s_{02})\dots(s-s_{0m})}{(s-s_{\infty1})(s-s_{\infty2})\dots(s-s_{\infty n})}$$

$s_{0m} \hat{=}$ Nst. ; $s_{\infty n} \hat{=}$ Polst.

Impulsantwort $g(t)=L^{-1}\{G(s)\}$

Sprungantwort $h(t)=L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$

Zusammenhang zwischen Sprung- u. Impulsantwort

$$H(s)=\frac{1}{s}G(s) \qquad\qquad G(s)=s\cdot H(s)$$

$$h(t)=\int_{0-}^{t+} g(\tau)\,d\tau \qquad\qquad g(t)=\dot{h}(t)$$

Relative Extrema einer Funktion $z = f(x,y)$

Satz:

Die Funktion $f(x,y)$ sei in einem Gebiet D der XY-Ebene definiert und im Punkt $(x_o,y_o) \in D$ seien ihre partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetig.

a) Notwendig für ein relatives Extremum der Funktion f im Punkt (x_o,y_o) ist:

$$\boxed{f'_x(x_o,y_o) = 0; \quad f'_y(x_o,y_o) = 0}$$

b) Es sei $\Delta = f''_{xx}(x_o,y_o) \cdot f''_{yy}(x_o,y_o) - \left[f''_{xy}(x_o,y_o)\right]^2$

Hinreichend für ein relatives Extremum der Funktion f im Punkt (x_o,y_o) ist:

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x(x_o,y_o) &= 0 \\ f'_y(x_o,y_o) &= 0 \\ \Delta &> 0 \end{aligned}}$$

Dabei gilt:

Rel. Maximum, falls $f''_{xx}(x_o,y_o) < 0$ (bzw. $f''_{yy} < 0$)

Rel. Minimum, falls $f''_{xx}(x_o,y_o) > 0$ (bzw. $f''_{yy} > 0$).

c) Die Funktion f besitzt in (x_o,y_o) **kein** rel. Extremum, falls

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x(x_o,y_o) &= 0 \\ f'_y(x_o,y_o) &= 0 \\ \Delta &< 0 \end{aligned}}$$

1. Addition von Matrizen

$A + B = B + A;$ $\quad$ $A + (B + C) = (A + B) + C;$

$A + (-A) = 0;$ $\quad$ $A + 0 = A.$

2. Multiplikation von Matrizen mit komplexen Zahlen

$(k_1 + k_2) A = k_1 A + k_2 A;$

$k(A + B) = kA + kB;$

$k_1(k_2 A) = (k_1 k_2) A.$

3. Matrizenmultiplikation

$A(BC) = (AB)C;$

$A(B + C) = AB + AC;$

$(A + B) \cdot C = AC + BC;$

$A0 = 0A = 0.$

Es gilt nicht allgemein: $AB = BA.$

Es gilt nicht allgemein: $AB = 0 \longrightarrow A = 0$ oder $B =$

4. Transponierung:

$(A^T)^T = A;$

$(A + B)^T = A^T + B^T;$

$(AB)^T = B^T \cdot A^T.$

5. Quadratische Matrizen

5.1 Einheitsmatrizen E

$AE = EA = A;$

$AB = A \longrightarrow B = E;$

$AB = B \longrightarrow A = E.$

5.2 Determinante detA

Die Determinante ist nur für eine quadratische Matrix definiert.

A heißt "regulär", falls $\det A \neq 0;$

A heißt "singulär", " $\det A = 0;$

$\det(A^T) = \det A;$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B;$

$\det(BA) = \det A \cdot \det B;$

5.3 Inverse einer regulären Matrix A

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E;$

$(A^{-1})^{-1} = A;$

$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$

$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Falls A regulär, gilt:

a) $AX = B \longrightarrow X = A^{-1}B;$

b) $XA = B \longrightarrow X = BA^{-1};$

c) $AB = 0 \longrightarrow B = 0$

d) $BA = 0 \longrightarrow B = 0.$

Lineare Unabhängigkeit

$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$

mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$

Matrizen Algebra:

Indizes: a_{ik}: i-te Zeile; k-te Spalte

Transponierte Matrix:

Es werden Zeilen u. Spalten vertauscht

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Diagonalmatrizen: Außerhalb H.D. nur 0

Einheitsmatrix (H.D. nur 1, sonst 0)

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrizenmultiplikation:

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} g & h & i & j \\ k & l & m & n \\ o & p & q & r \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} (a \cdot g + b \cdot k + c \cdot o) & (a \cdot h + b \cdot l + c \cdot p) & \dots \\ (d \cdot g + e \cdot k + f \cdot o) & (d \cdot h + e \cdot l + f \cdot p) & \dots \end{pmatrix}$

1. Allgemeine Lösung einer DGL: $g_1(x)\, y' + g_0(x)\, y = h(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= y_1(x) \left[A + \int \frac{h(x)\, dx}{g_1(x)\, y_1(x)} \right] \\ \text{mit } y_1(x) &= \exp\left(- \int \frac{g_0(x)\, dx}{g_1(x)}\right) \end{aligned}}$$

2. Allgemeine Lösung y_H der DGL: $a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$

Mit dem Ansatz $y = \exp(mx)$ gelangt man zur sog. "charakteristischen Gleichung der DGL":

$$\boxed{P(m) = a_2\, m^2 + a_1\, m^1 + a_0 = 0}$$

mit den Lösungen m_1 und m_2. Unter der Voraussetzung, daß alle Koeffizienten a_i reell sind, tritt stets einer der folgenden 3 Fälle auf:

a) $m_1 \neq m_2$, reell,

b) $m_1 = m_2$ $(= m_0)$, reell,

c) $m_{1;2} = c \pm j\, d$.

Die allg. Lösung y_H obiger DGL lautet dann für jeden der 3 Fälle:

a) $y_H = C_1\, e^{m_1 x} + C_2\, e^{m_2 x}$;

b) $y_H = e^{m_0 x}\, (C_1 + C_2 x)$;

$C_1, C_2 \in R$ frei wählbar

c) $y_H = e^{cx}\, (C_1 \cos(dx) + C_2 \sin(dx))$

$= A\, e^{cx} \sin(dx + \varphi)$

$(C_1, C_2 \in R$ bzw. $A, \varphi \in R$ frei wählbar$)$.

In allen 3 Fällen hat y_H die Form

$$y_H = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x),$$

wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear unabhängig sind.

3. Allgemeine Lösung y_I einer DGL: $a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = h(x)$

Es gilt: $\boxed{y_I = y_H + y_{I,P}}$, wobei

y_I = allg. Lösung der inhomogenen DGL

y_H = allg. Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$y_{I,P}$ = irgendeine partikuläre Lösung der inhom. DGL

<u>Bestimmung von $y_{I,P}$:</u>

<u>Methode 1:</u> (für beliebige Funktionen $h(x)$ geeignet)

Es sei y_H bereits bestimmt und habe die Form

$$y_H = C_1 * y_1(x) + C_2 * y_2(x).$$

Weiterhin sei

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} .$$

Dann ist folgender Ausdruck eine partikuläre Lösung obiger inhomogener DGL :

$$\boxed{y_{I,P} = - y_1(x) \int \frac{h(x)\, y_2(x)}{a_2\, W(x)}\, dx + y_2(x) \int \frac{h(x)\, y_1(x)}{a_2\, W(x)}\, dx}$$

<u>Methode 2:</u>

Man macht für $y_{I,P}$ einen der im folgenden angegebenen Ansätze.
Vorteil von Methode 2 gegenüber Methode 1: Man muß keine Integrale lösen.
Nachteil: Jeder Ansatz ist nur für einen bestimmten Funktionstyp $h(x)$ geeignet.
Wie die beiden folgenden Seiten zeigen, hängt der Ansatz für $y_{I,P}$ von $h(x)$ sowie von den Lösungen $m_{1;2}$ der charakteristischen Gleichung der zugehörigen homogenen DGL ab.

a) $h(x) = b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_k x^k$, (alle $b_i \in R$; $b_k \neq 0$; $k \in N_0$)

α) 0 ist <u>keine</u> Nullstelle von P(m);

<u>Ansatz</u>: $y_{I;P} = c_0 + c_1 x^1 + \ldots + c_k x^k$;

β) 0 ist <u>r-fache Nullstelle</u> von P(m);

<u>Ansatz</u>: $y_{I;P} = x^r (c_0 + c_1 x^1 + \ldots + c_k x^k)$.

---

b) $h(x) = b_1 \sin(ax) + b_2 \cos(ax)$, wobei $(b_1^2 + b_2^2) > 0$; $a \neq 0$; alles reell.

α) P(m) besitzt <u>nicht</u> das Nullstellenpaar ($\pm aj$)

Ansatz: $y_{I;P} = c_1 \sin(ax) + c_2 \cos(ax)$;

β) P(m) besitzt das Nullstellenpaar ($\pm aj$).

Ansatz: $y_{I;P} = x\,(c_1 \sin(ax) + c_2 \cos(ax))$.

---

c) $h(x) = e^{ax} (b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_k x^k)$, (alle b_i reell, $b_k \neq 0$, $a \neq 0$).

α) a ist <u>keine</u> Nullstelle von P(m);

Ansatz: $y_{I;P} = e^{ax} (c_0 + c_1 x^1 + \ldots + c_k x^k)$.

β) a ist <u>r-fache Nullstelle</u> von P(m);

Ansatz: $y_{I;P} = x^r e^{ax} (c_0 + c_1 x^1 + \ldots + c_k x^k)$.

---

d) $h(x) = e^{qx} (b_1 \sin(ax) + b_2 \cos(ax))$, wobei $(b_1^2 + b_2^2) > 0$, $a \neq 0$, alles reell.

α) $(q \pm aj)$ ist <u>kein Nullstellenpaar</u> von P(m);

Ansatz: $y_{I;P} = e^{qx} (c_1 \sin(ax) + c_2 \cos(ax))$.

β) $(q \pm aj)$ ist ein Nullstellenpaar von P(m);

Ansatz: $y_{I;P} = x\, e^{qx} (c_1 \sin(ax) + c_2 \cos(ax))$.

e) $h(x) =$

$= (b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k)\, e^{qx} (c_1 \sin(ax) + c_2 \cos(ax))$,

wobei $(c_1^2 + c_2^2) > 0$; $k \in N_0$; a, q, c_1, c_2, alle b_i reell.

α) $(q \pm aj)$ ist <u>kein Nullstellenpaar</u> von P(m);

Ansatz: $y_{I;P} = e^{qx} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k) \sin(ax) + e^{qx} (b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k) \cos(ax)$.

β) $(q \pm aj)$ ist ein Nullstellenpaar von P(m);

Ansatz: $y_{I;P} = x\, e^{qx} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k) \sin(ax) + x\, e^{qx} (b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k) \cos(ax)$.

Laplace Transformation:

Operationen im t/s-Bereich:

Multiplikation mit einer konstanten C: $c \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ c \cdot F(s)$

Verschiebung im Zeitbereich um t_0: $f(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) \cdot e^{-s t_0}$

Periodische Fortsetzung von f(t) um Periode T: $F(s) = \dfrac{F(s)}{1 - e^{-sT}}$

Dämpfung im Zeitbereich $f(t) \cdot e^{-\delta t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s + \delta)$

Differentiation im Zeitbereich: $\dfrac{d}{dt_{t+}} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0-)$

Integration im Zeitbereich: $\int_{0-} f(\tau)\, d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s} F(s)$

Faltung: $f(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) \cdot G(s)$

Faltungssatz: $y_1(t) * y_2(t) = \begin{cases} \int_{0-}^{t+} y_1(\tau) \cdot y_2(t - \tau)\, d\tau \\ \int_{0-}^{t+} y_1(t - \tau) \cdot y_2(\tau)\, d\tau \end{cases}$

Anfangswertsatz: $\lim\limits_{t \to 0+} f(t) = \lim\limits_{s \to \infty} (s \cdot F(s))$

Endwertsatz: $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{s \to 0} (s \cdot F(s))$

Berechnung von Systemantworten:

$Y(s) = G(s) \cdot X(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t) = g(t) * x(t) = \underbrace{\int_{0-}^{t+} g(t - \tau) \cdot x(\tau)\, d\tau = \int_{0-}^{t+} g(\tau) \cdot x(t - \tau)\, d\tau}_{\text{Duhamel Integrale}}$

$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = H(s) \cdot sX(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\ h(t) * \dot{x}(t) = \int_{0-}^{t+} h(t - \tau) \cdot \dot{x}(\tau)\, d\tau = \int_{0-}^{t+} h(\tau) \cdot \dot{x}(t - \tau)\, d\tau$